# Dioptrische Abbildung
## einer Kugel
## in einem gegebenen Oberflächenelement
## eines Rotationsellipsoides.

Inaugural-Dissertation

zur

**Erlangung der Doktorwürde**

der

hohen philosophischen Fakultät der Landes-Universität Rostock

vorgelegt von

Otto Zühlke
aus Hannover.

**Rostock,**
H. Winterberg's Buchdruckerei
1903.

Referent: Herr Professor Dr. Matthiessen.

Meinen Eltern

in Liebe und Dankbarkeit gewidmet.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552724_0077

# Einleitung.

In den klassischen »dioptrischen Untersuchungen« von Gauss (1841) sind die Beschränkungen zu Grunde gelegt, dass bei der Brechung in einer sphärischen Fläche die einfallenden Strahlen paraxial verlaufen, mit den Einfallsloten also sehr kleine Winkel bilden. Für ein centriertes System brechender Flächen gelten die gewöhnlichen dioptrischen Formeln auch nur dann, wenn die einfallenden Strahlen sehr kleine Winkel mit der Centrale dieses Systems, das ist das allen Flächen gemeinsame Einfallslot, einschliessen.

Jaques Sturm[1] dehnte in seiner Abhandlung »Mémoire sur l'optique« zuerst die Untersuchungen auch auf solche Strahlenbündel aus, die in messbarer Entfernung von der optischen Achse verlaufen. Er kam zu dem Ergebnis, dass man von einem leuchtenden Punkt nach der Brechung in einer sphärischen Fläche im allgemeinen ein verzerrtes Bild erhält. Demnach bleiben die Strahlen nicht mehr homocentrisch. Sämtliche Strahlen des von dem leuchtenden Punkte ausgehenden Strahlenkegels gehen nach der Brechung durch

[1]) Sturm. — Mémorie sur l'optique. Compt. rend. XX (1845) Poggend. Ann. 65 p. 116 und 374 (1845).

zwei sich kreuzende unendlich kleine Linien und erleiden insofern eine Modifikation, als sie in der Nähe des Bildes einen tetraedrischen Raum erfüllen. Die sich kreuzenden Linien, die Maxima der Helligkeit, werden Brennlinien genannt und liegen in zwei aufeinander senkrechten Ebenen, den sogenannten Fokalebenen. Die Objekt- und Bildpunktabscissen sind von Sturm auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen.

Wesentlich erweitert sind diese Untersuchungen von Reusch[1] durch Einführung der Abscissen konjungierter Punkte auf den Strahlen selbst, sowie der Fixpunkte, durch deren Anwendung die geometrische Konstruktion der Bildpunkte bedeutend vereinfacht wird.

Über die Brechung unendlich dünner Strahlenbündel in beliebig gekrümmten Oberflächen sowie über die Lage der Brennlinien sind dann von Neumann[2] und Matthiessen[3] eingehende Untersuchungen angestellt und in den unten angebenen Schriften niedergelegt.

Nach den beiden letzten Autoren bilden die Brennlinien im allgemeinen schiefe Winkel mit dem Haupt-

---

[1]) Reusch, Reflexion und Brechung des Lichtes in sphärischen Flächen etc.
Poggendorf. Annal. (1867) p. 497.

[2]) Neumann, Brechung sehr dünner Strahlenbündel, Ber. d. Sächs. Ges. d. Wiss. Math. phys. Kl. (1880) p. 53.

[3]) Matthiessen, Untersuchungen über die Lage der Brennlinien eines unendlich dünnen Strahlenbündels. Acta math. Mittag-Leffler IV. (1884). Schlömilchs Zeitschrift für Math. und Phys. 33 p. 167 (1888).
Matthiessen, Über den Astigmatismus von Strahlenbündeln bei schiefer Incidenz auf krumme Oberflächen.
Eversbusch, Berlin, Zeitschrift für vergl. Augenheilkunde VI. § 39 (1889).

strahl, während Sturm und Kummer die Ansicht vertreten, dass die beiden Brennlinien auf dem Hauptstrahl des Bündels senkrecht stehen. Die Neigung der Brennlinien gegen den Hauptstrahl und gegen einander ist von Matthiessen und Kummer in angefertigten Fadenmodellen in geeigneter Weise demonstriert.

In vorliegender Arbeit soll nun die dioptrische Abbildung einer Kugel in einem gegebenen Oberflächenelement eines Rotationsellipsoides mathematisch und graphisch behandelt werden, wobei angenommen wird, dass der Mittelpunkt der Kugel mit dem Incidenzpunkt zusammenfällt.

# Erster Teil.

## Mathematische Ableitungen der Gesetze für die Brechung unendlich dünner Strahlenbündel in beliebig gekrümmten Oberflächen.

Nach dem Fermatschen Satze ist die Zeit, die ein Lichtstrahl gebraucht, um von einem leuchtenden Punkte beim Übergang in ein dichteres Medium zu einem andern Punkt zu gelangen, ein Minimum. Bezeichnet man daher mit s und $s_1$ die Objekt- bezw. Bilddistanz vom Inzidenzpunkt der brechenden Fläche aus gerechnet, mit v und $v_1$ die Geschwindigkeiten des Lichtes vor bezw. in dem dichteren Medium, so stellt die Gleichung:

$$(1) \qquad T = \frac{s}{v} + \frac{s_1}{v_1} = \omega \text{ (Minimum)}$$

ein Minimum dar. Diese Beziehung lässt sich nun in einer anderen Form schreiben. Berücksichtigt man nämlich, dass die Sinus der Einfalls- und Brechungswinkel im Verhältnis der Geschwindigkeiten stehen, so ergiebt sich:

$$\frac{\sin e_2}{\sin e_1} = \frac{v}{v_1} = n$$

wenn $e_2$ den Einfallswinkel, $e_1$ den Brechungswinkel und n den Brechungsindex des Diopters bedeuten. Gl. (1) geht somit über in:

$$s + n s_1 = \omega = \text{Minimum} \tag{2}$$

Die Gleichung der brechenden Fläche ist gegeben in der Form $u = 0$, bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem. Der Incidenzpunkt soll die Coordinaten x y z haben.

Nach dem Lagrange'schen Verfahren ergeben sich nun folgende drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\delta\omega}{\delta x} - \lambda \frac{\delta u}{\delta x} &= 0 \\ \frac{\delta\omega}{\delta y} - \lambda \frac{\delta u}{\delta y} &= 0 \\ \frac{\delta\omega}{\delta z} - \lambda \frac{\delta u}{\delta z} &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

worin $\lambda$ einen unbestimmten Faktor bedeutet.

Bezeichnet man die Richtungskosinus der Strahlen s und $s_1$ gegen die Coordinatenachsen und zwar in der Richtung des fortschreitenden Lichtes mit a b c bezw. $a_1$ $b_1$ $c_1$, so ergeben sich aus (2) und (3) ohne weiteres folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} \frac{\delta s}{\delta x} + n \frac{\delta s_1}{\delta x} = \lambda \frac{\delta u}{\delta x} &= a - n a_1 \\ \frac{\delta s}{\delta y} + n \frac{\delta s_1}{\delta y} = \lambda \frac{\delta u}{\delta y} &= b - n b_1 \\ \frac{\delta s}{\delta z} + n \frac{\delta s_1}{\delta z} = \lambda \frac{\delta u}{\delta z} &= c - n c_1 \end{aligned} \tag{4}$$

Die Gleichungen der Geraden s und $s_1$, ausgedrückt durch ihre Richtungskosinus, stellen sich in der Form dar:

$$(5)\qquad \begin{aligned} (x-\xi) : (y-\eta) : (z-\zeta) &= a : b : c \\ (x-\xi) : (y-\eta) : (z-\zeta) &= a_1 : b_1 : c_1 \end{aligned}$$

Will man nun die Gleichung der Normalen im Incidenzpunkt x, y, z der Oberfläche u=o aufstellen, so hat man nur ihre Richtungskosinus den partiellen Ableitungen der Funktion u=o nach den einzelnen Variabeln x, y, z genommen, proportional zu setzen. Mithin ergiebt sich für die Normale:

$$(6)\qquad (x-\xi) : (y-\eta) : (z-\zeta) = \frac{\delta u}{\delta x} : \frac{\delta u}{\delta y} : \frac{\delta u}{\delta z}$$

oder die Werte für $\frac{\delta u}{\delta x}$, $\frac{\delta u}{\delta y}$ und $\frac{\delta u}{\delta z}$ aus (4) eingesetzt:

$$(7)\quad (x-\xi) : (y-\eta) : (z-\zeta) = (a - n a_1) : (b - n b_1) : (c - n c_1)$$

Die Gleichung einer Ebene, die durch den Punkt xyz hindurchgeht, ist gegeben in der Form:

$$(8)\qquad A(x-\xi) + B(y-\eta) + C(z-\zeta) = 0$$

Sollen nun die Gleichungen der beiden Strahlen s und $s_1$ sowie die Gleichung der Normalen im Incidenzpunkt der Ebene (8) genügen, so müssen folgende Bedingungen erfüllt werden;

$$(9)\qquad \begin{aligned} A\,a + B\,b + C\,c &= 0 \\ A\,a_1 + B\,b_1 + C\,c_1 &= 0 \\ A(a - n a_1) + B(b - n b_1) + C(c - n c_1) &= 0 \end{aligned}$$

Die Determinante dieser 3 Gleichungen, die durch Elimination der Konstanten A,B,C. erhalten wird, muss verschwinden, wenn die drei Bedingungen zu gleicher Zeit erfüllt sein sollen.

Es wird demnach:

$$(10) \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a - na_1 & b - nb_1 & c - nc_1 \end{vmatrix} = 0$$

Bei der Auflösung verschwindet in der Tat diese Determinante. Es wird:

$$a(b_1 c - n b_1 c - b c_1 + n b_1 c) + b(a c_1 - n a_1 c_1 - a_1 c + n a_1 c_1) + c(a_1 b - n a_1 b_1 - a b_1 + n a_1 b_1) = 0$$

oder

$$+ a b_1 c + n a b_1 c + a b c_1 + n a_1 b c_1 + a_1 b c + n a_1 b_1 c - a b_1 c - n a b_1 c - a b c_1 - n a_1 b c_1 - a_1 b c - n a_1 b_1 c = 0$$

Die Determinate (10) lehrt demnach, das einfallender und gebrochener Strahl mit der Normalen im Incidenzpunkt in einer Ebene liegen. Es ergiebt sich daraus der bekannte Satz, dass bei der Brechung in einer beliebigen Fläche Einfalls- und Brechungsebene zusammenfallen.

Bezeichnet man nun mit $\varepsilon$ das Azimut der Einfallsebene gegen den Hauptnormalschnitt, mithin auch nach dem vorhergehenden das der Brechungsebene, ferner

mit $\alpha$ $\beta$ $\gamma$ die Winkel, die die Normale mit den Coordinatenachsen einschliesst, so ergeben sich für die Richtungskosinus a b c und $a_1$ $b_1$ $c_1$ der Strahlen s und $s_1$ folgende Werte:

$$
\begin{aligned}
a &= \cos\alpha \cos e_2 + \sin\alpha \sin e_2 \cos\varepsilon \\
b &= \cos\beta \cos e_2 + \sin\beta \sin e_2 \sin\varepsilon \\
c &= \cos\gamma \cos e_2 + \sin\gamma \sin e_2 \cos\varepsilon \\
a_1 &= \cos\alpha \cos e_1 + \sin\alpha \sin e_1 \cos\varepsilon \\
b_1 &= \cos\beta \cos e_1 + \sin\beta \sin e_1 \sin\varepsilon \\
c_1 &= \cos\gamma \cos e_1 + \sin\gamma \sin e_1 \cos\varepsilon
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Der Einfachheit halber soll nun weiterhin angenommen werden, dass der Coordinatenanfangspunkt mit dem Incidenzpunkt zusammenfällt und die Normale zugleich die Z-Achse wird. Dann ist $\alpha = 90°$, $\beta = 90°$, $\gamma = 0°$ und die Werte für a b c, $a_1$ $b_1$ $c_1$ nehmen folgende einfache Gestalt an:

$$
\begin{aligned}
a &= \sin e_2 \cos\varepsilon & a_1 &= \sin e_1 \cos\varepsilon \\
b &= \sin e_2 \sin\varepsilon & b_1 &= \sin e_1 \sin\varepsilon \\
c &= \cos e_2 & c_1 &= \cos e_1
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Hieraus ergiebt sich durch Differentiation:

$$
\begin{aligned}
da &= \cos e_2 \cos\varepsilon \, de_2 - \sin e_2 \sin\varepsilon \, d\varepsilon \\
db &= \cos e_2 \sin\varepsilon \, de_2 + \sin e_2 \cos\varepsilon \, d\varepsilon \\
dc &= -\sin e_2 \, de_2 \\
da_1 &= \cos e_1 \cos\varepsilon \, de_1 - \sin e_1 \sin\varepsilon \, d\varepsilon \\
db_1 &= \cos e_1 \sin\varepsilon \, de_1 + \sin e_1 \cos\varepsilon \, d\varepsilon \\
dc_1 &= -\sin e_1 \, de_1
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Das auf die krumme Oberfläche auffallende unendlich dünne Strahlenbündel trifft nur ein unendlich

kleines Element der Oberfläche, für welches man das oskulierende elliptische Paraboloid setzen kann. Die Gleichung desselben lautet:

$$(14) \qquad \frac{M x^2 + 2 O x y + N y^2}{2} - z = 0$$

Hierin sind M,N und O Konstante, $x = y = z = O$.

Für das unendlich kleine Oberflächenelement ergeben sich daher folgende Werte:

$$\lambda \frac{\delta u}{\delta x} = 0 \qquad \lambda \frac{\delta u}{\delta y} = 0 \qquad \lambda \frac{\delta u}{\delta z} = - \lambda$$

oder mit Rücksicht auf Gl (4).

$$(15) \qquad \begin{aligned} a - n a_1 &= 0 \\ b - n b_1 &= 0 \\ c - n c_1 &= 0 \end{aligned}$$

Durch Substitution der Werte für a b c und $a_1$ $b_1$ $c_1$ findet man übrigens aus den letzten Gleichungen, wie schon im Anfang bewiesen wurde, dass die Azimute der Einfalls- und Brechungsebene einander gleich sind.

Wählt man nun überdies noch die Einfallsebene zur XZ-Ebene, so dass $\varepsilon$ gleich Null wird, so vereinfachen sich die Gleichungen (13) wesentlich, und man erhält:

$$(16) \qquad \begin{aligned} d a &= \cos e_2 \, d e_2 \\ d b &= \sin e_2 \, d \varepsilon \\ d c &= - \sin e_2 \, d e_2 \\ d a_1 &= \cos e_1 \, d e_1 \\ d b_1 &= \sin e_1 \, d \varepsilon \\ d c_1 &= - \sin e_1 \, d e_1 \end{aligned}$$

Durch Differentiation der Gleichungen (4) erhält man für einen unendlich nahen Strahl, der durch den Punkt $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ hindurchgeht, folgende Beziehungen:

$$
\begin{aligned}
d\,a - n\,d\,a_1 &= \lambda \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} dy + \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} dz\right] + \frac{\partial u}{\partial x} d\lambda \\
d\,b - n\,d\,b_1 &= \lambda \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} dz\right] + \frac{\partial u}{\partial y} d\lambda \\
d\,c - n\,d\,c_1 &= \lambda \left[\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} dx + \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial y} dy + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz\right] + \frac{\partial u}{\partial z} d\lambda
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Mit Berücksichtigung der Gleichung des oskulierenden Paraboloids ergiebt sich nun:

$$
\begin{aligned}
d\,a - n\,d\,a_1 &= \lambda\,(M\,d\,x + O\,d\,y) \\
d\,b - n\,d\,b_1 &= \lambda\,(O\,d\,x + N\,d\,y) \\
d\,c - n\,d\,c_1 &= -\,d\,\lambda \\
d\,z &= O
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Wenn man hierin die Werte der Differentiale für a b c und $a_1$ $b_1$ $c_1$ aus (16) substituiert, so resultiert:

$$
\begin{aligned}
\cos e_2\,d\,e_2 - n \cos e_1\,d\,e_1 &= \lambda\,(M\,d\,x + O\,d\,y) \\
\sin e_2\,d\,\varepsilon - n \sin e_1\,d\,\varepsilon &= \lambda\,(O\,d\,x + N\,d\,y) \\
-\sin e_2\,d\,e_2 + n \sin e_1\,d\,e_1 &= -\,d\,\lambda \\
d\,z &= O
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Es erübrigt nun, hierin die Werte von $d\,e_2$ und $\sin e_2\,d\,\varepsilon$ für das einfallende Strahlenbündel, analog $d\,e_1$ und $\sin e_1\,d\,\varepsilon$ für das gebrochene Strahlenbündel zu berechnen.

Zunächst soll nun die Voraussetzung gemacht werden, dass das einfallende Strahlenbündel von vornherein astigmatisch ist. Die Abscissen der Brennlinien $A_1$ und $A_2$ dieses Bündels seien dann $\xi_0$ und $x_0$, das Azimut der Fokalebene gegen die Einfallsebene sei $\vartheta_1$ bezw. $90^0 + \vartheta_1$. Analog diesen Bezeichnungen gelten für das gebrochene Strahlenbündel folgende: $x_1$ und $x_2$ seien die Abscissen der Brennlinien $B_1$ und $B_2$, $\vartheta_2$ bezw. $90^0 + \vartheta_2$ die Azimute der Fokalebenen.

Für die Richtungskosinus der Brennlinien $A_1$ und $A_2$ des einfallenden Bündels, die mit $\alpha\,\beta\,\gamma$ bezw. $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1$ bezeichnet werden sollen, gelten dann folgende Gleichungen:

$$(20)\quad \begin{aligned} \alpha &= \cos e_2 \sin \vartheta_1 & \alpha_1 &= -\cos e_2 \cos \vartheta_1 \\ \beta &= \cos \vartheta_1 & \beta_1 &= \sin \vartheta_1 \\ \gamma &= -\sin e_2 \sin \vartheta_1 & \gamma_1 &= \sin e_2 \cos \vartheta_1 \end{aligned}$$

Mit Hülfe der Gleichungen (16) resultiert hieraus:

$$(21)\quad \begin{aligned} \alpha\, d\,a + \beta\, d\,b + \gamma\, d\,c &= \sin \vartheta_1\, de_2 + \cos \vartheta_1 \sin e_2\, d\,\varepsilon \\ \alpha_1\, d\,a + \beta_1\, d\,b + \gamma_1\, d\,c &= -\cos \vartheta_1\, de_2 + \sin \vartheta_1 \sin e_2\, d\varepsilon \end{aligned}$$

Soll nun ein unendlich naher Strahl, dessen Einfallspunkt die Coordinaten $d\,x$, $d\,y$, $d\,z$ hat, auch dem astigmatischen Bündel angehören, so muss er durch die Brennlinien $A_1$ und $A_2$ hindurchgehen, da dieselben bekanntlich als der Ort sämtlicher Strahlen des Bündels aufgefasst werden. Der unendlich nahe Strahl möge die Brennlinien in den Punkten $\xi$, $\eta$, $\zeta$ und $\xi_1$, $\eta_1$, $\zeta_1$ schneiden.

Bei der Projektion von $\xi, \eta, \zeta$ auf die entsprechenden Coordinatenachsen kann man nun ein Mal auf dem Hauptstrahl $x_0$, ein anderes Mal auf dem Nebenstrahl $x_0 + d x_0$ fortschreiten. Man erhält dann für $\xi, \eta, \zeta$ nacheinander jedesmal zwei Werte, wie aus folgendem ersichtlich ist:

$$\begin{aligned} \xi &= a\, x_0 + \alpha\, d\, A_2 = d\, x + (a + d\, a)\,(x_0 + d\, x_0) \\ \eta &= b\, x_0 + \beta\, d\, A_2 = d\, y + (b + d\, b)\,(x_0 + d\, x_0) \\ \zeta &= c\, x_0 + \gamma\, d\, A_2 = d\, z + (c + d\, c)\,(x_0 + d\, x_0) \end{aligned} \tag{22}$$

Multipliziert man diese Werte der Reihe nach mit $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1$ und addiert, so ergiebt sich:

$$\alpha_1\, d\, x + \beta_1\, d\, y + \gamma_1\, d\, z + x_0 (\alpha_1\, d\, a + \beta_1\, d\, b + \gamma_1\, d\, c) = 0 \tag{23}$$

Dasselbe Verfahren für $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$ durchgeführt ergiebt eine entsprechende Gleichung:

$$\alpha\, d\, x + \beta\, d\, y + \gamma\, d\, z + \xi_0 (\alpha\, d\, a + \beta\, d\, b + \gamma\, d\, c) = 0 \tag{24}$$

Dabei hat man zu berücksichtigen, dass die ersten Brennlinien sowohl zu einander als auch zum Hauptstrahl senkrecht stehen, und daher die Relationen gelten:

$$\begin{aligned} \alpha\ \alpha_1 + \beta\ \beta_1 + \gamma\ \gamma_1 &= 0 \\ \alpha_1\ a + \beta_1\ b + \gamma_1\ c &= 0 \end{aligned}$$

Aus Gl. (23) und (24) ergiebt sich durch Einsetzen der Werte:

$$\begin{aligned} &- \cos e_2 \cos \vartheta_1\, d\, x + \sin \vartheta_1\, d\, y + x_0 \\ &\qquad (- \cos \vartheta_1\, d\, e_2 + \sin \vartheta_1 \sin e_2\, d\, \varepsilon) = 0 \\ &+ \cos e_2 \sin \vartheta_1\, d\, x + \cos \vartheta_1\, d\, y + \xi_0 \\ &\qquad (\sin \vartheta_1\, d\, e_2 + \cos \vartheta_1 \sin e_2\, d\, \varepsilon) = 0 \end{aligned} \tag{25}$$

Daraus erhält man nach einigen Umformungen für $d e_2$ und $\sin e_2 \, d\varepsilon$ folgende Werte:

$$
\begin{aligned}
d e &= -\left\{\left(\frac{\cos^2 \vartheta_1}{x_0} + \frac{\sin^2 \vartheta_1}{\xi_0}\right) \cos e_2 \, d x + \right. \\
&\qquad \left. \left(\frac{1}{\xi_0} - \frac{1}{x_0}\right) \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_1 \, d y\right\} \qquad (26) \\
\sin e_2 \, d\varepsilon &= -\left\{\left(\frac{1}{\xi_0} - \frac{1}{x_0}\right) \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_1 \cos e_2 \, d x + \right. \\
&\qquad \left. \left(\frac{\sin^2 \vartheta_1}{x_0} + \frac{\cos^2 \vartheta_1}{\xi_0}\right) d y\right\}
\end{aligned}
$$

Für das gebrochene Strahlenbündel ergeben sich ganz analoge Ausdrücke für $d e_1$ und $\sin e_1 \, d\varepsilon$.

In Gl. (26) setzt man der besseren Übersicht wegen

$$
\begin{aligned}
\frac{\cos^2 \vartheta_1}{x_0} + \frac{\sin^2 \vartheta_1}{\xi_0} &= P \\
\frac{\sin^2 \vartheta_1}{x_0} + \frac{\cos^2 \vartheta_1}{\xi_0} &= Q \\
\left(\frac{1}{\xi_0} - \frac{1}{x_0}\right) \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_1 &= R
\end{aligned}
$$

Analog für die entsprechenden Werte des gebrochenen Strahlenbündels $P_1$, $Q_1$, $R_1$. Dann kann man offenbar $d e_2$, $\sin e_2 \, d\varepsilon$, sowie $d e_1$, $\sin e_1 \, d\varepsilon$ folgenden Werten gleich setzen:

$$
\begin{aligned}
d e_2 &= -(P \cos e_2 \, d x + R \, d y) \\
\sin e_2 \, d\varepsilon &= -(R \cos e_2 \, d x + Q \, d y) \qquad (27) \\
d e_1 &= -(P_1 \cos e_1 \, d x + R_1 \, d y) \\
\sin e_2 \, d\varepsilon &= -(R_1 \cos e_1 \, d x + Q_1 \, d y)
\end{aligned}
$$

In der Gleichung des oskulierenden Paraboloids, das für das Oberflächenelement der krummen Fläche eingesetzt wurde, haben die Konstanten M, N, O die folgenden Werte;

$$(28)\qquad \begin{aligned} M &= \frac{\cos^2 \varepsilon}{\rho_2} + \frac{\sin^2 \varepsilon}{\rho_1} \\ N &= \frac{\sin^2 \varepsilon}{\rho_2} + \frac{\cos^2 \varepsilon}{\rho_1} \\ O &= \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right) \sin \varepsilon \cos \varepsilon \end{aligned}$$

Nach früherem ist nun:

$$\begin{aligned} \cos e_2 \, d e_2 - n \cos e_1 \, d e_1 &= \lambda (M \, dx + O \, dy) \\ \sin e_2 \, d \varepsilon - n \sin e_1 \, d \varepsilon &= \lambda (O \, dx + N \, dy) \end{aligned}$$

Setzt man hierin die Werte für $d e_2$, $\sin e_2 d \varepsilon$ und $d e_1$, $\sin e_1 \, d \varepsilon$ aus (27) ein, so erhält man folgende Beziehungen zwischen den Grössen P, Q, R und $P_1$, $Q_1$, $R_1$

$$(29)\qquad \begin{aligned} -P \cos^2 e_2 + n P_1 \cos^2 e_1 &= \lambda M \\ -Q + n Q_1 &= \lambda N \\ -R \cos e_2 + n R_1 \cos e_1 &= \lambda O \end{aligned}$$

Es handelt sich nun noch darum, den Faktor $\lambda$ zu bestimmen.

Nach Gl. (15) ist: $c - n c_1 = -\lambda$

oder $\cos e_2 - n \cos e_1 = -\lambda$

$$\lambda = n \cos e_1 - \cos e_2$$

Nach dem Snellius'schen Brechungsgesetz ist aber:

$$n = \frac{\sin e_2}{\sin e_1}$$

Setzt man diesen Wert in die Gleichung für $\lambda$ ein, so resultiert:

$$\lambda = \frac{\sin e_2 \cdot \cos e_1 - \cos e_2 \sin e_1}{\sin e_1}$$

$$\lambda = \frac{\sin (e_2 - e_1)}{\sin e_1}$$

Nunmehr sind in (29) sämtliche Grössen bestimmt. Setzt man die Werte für dieselben ein, so gelangt man nach verschiedenen Umformungen auf die von Carl Neumann in übersichtlicher Weise aufgestellten Gleichungen für die Objekt- und Bilddistanzen.

$$\text{I.} \quad \frac{-\rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \sin e_1 \cdot \cos^2 e_2}{(\rho_2 \cos^2 \varepsilon + \rho_1 \sin^2 \varepsilon) \sin (e_2 - e_1)} \left( \frac{\cos^2 \vartheta_1}{x_0} + \frac{\sin^2 \vartheta_1}{\xi_0} \right)$$

$$+ \frac{n \cdot \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \sin e_1 \cdot \cos^2 e_1}{(\rho_2 \cos^2 \varepsilon + \rho_1 \sin^2 \varepsilon) \sin (e_2 - e_1)} \left( \frac{\cos^2 \vartheta_2}{x_0} + \frac{\sin^2 \vartheta_2}{x_1} \right) = 1$$

$$\text{II.} \quad \frac{-\rho_1 \rho_2 \sin e_1}{(\rho_2 \sin^2 \varepsilon + \rho_1 \cos^2 \varepsilon) \sin (e_2 - e)} \left( \frac{\sin^2 \vartheta_1}{x_0} + \frac{\cos^2 \vartheta_1}{\xi_0} \right)$$

$$+ \frac{n \cdot \rho_1 \rho_2 \sin e_1}{(\rho_2 \sin^2 \varepsilon + \rho_1 \cos^2 \varepsilon) \sin (e_2 - e_1)} \left( \frac{\sin^2 \vartheta_2}{x_2} + \frac{\cos^2 \vartheta_2}{x_1} \right) = 1$$

$$\text{III.} \quad \frac{-\rho_1 \rho_2 \sin e_1 \cos e_2 \sin 2\vartheta_1}{(\rho_1 - \rho_2) \sin (e_2 - e_1) \sin 2\varepsilon} \left( \frac{1}{x_0} - \frac{1}{\xi_0} \right)$$

$$+ \frac{n \cdot \rho_1 \cdot \rho_2 \sin e_1 \cdot \cos e_1 \cdot \sin 2\vartheta_1}{(\rho_1 - \rho_2) \sin (e_2 - e_1) \sin 2\varepsilon} \left( \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right) = 1$$

# Zweiter Teil.

## Präzisierung des Problems.

Die im ersten Teil dieser Arbeit abgeleiteten Gesetze für die Brechung unendlich dünner Strahlenbündel in beliebig gekrümmten Oberflächen sollen im folgenden auf die Fläche eines Rotationsellipsoides, in dem eine Kugel abgebildet werden soll, angewendet werden.

Reusch zeigt in seiner Abhandlung über die Reflexion und Brechung des Lichtes in sphärischen Flächen, dass die beiden Brennlinien des astigmatisch gebrochenen Strahlenbündels durch Strahlenfächer des Lichtbündels gebildet werden. Um zunächst mathematisch das Bild der Objektkugel zu entwerfen, denkt man sich durch die eintretenden Strahlenbündel zwei Ebenen gelegt, die den Haupt- und Nebennormalschnitt vorstellen.

Ersterer liegt in der Ebene der Tafel und ist bestimmt durch den Hauptstrahl des Bündels und die Normale im Incidenzpunkt. Eine durch den Hauptstrahl senkrecht zu dieser gelegte Ebene liefert den Nebennormalschnitt. Als Strahlenfächer werden nur alle

diejenigen Schnitte charakterisiert, die durch Parallelebenen zum Haupt- und Nebennormalschnitt gebildet werden. Und zwar bezeichnet man als Strahlenfächer erster Art diejenigen, welche im Hauptnormalschnitt und parallel zu demselben liegen. Der Nebennormalschnitt und die dazu parallelen Schnitte stellen dann die Strahlenfächer zweiter Art dar.

Die erste Brennlinie wird dann durch die Strahlenfächer erster Art, die zweite durch die Strahlenfächer zweiter Art gebildet. Berechnet man nun aus den Neumann'schen Gleichungen die Abscissen $x_1$, $x_2$ der beiden Brennlinien in den beiden Hauptschnitten für jeden einzelnen Strahl, so erhält man die Bildkurven des Objekts.

Als Haupt- und Nebennormalschnitt erhalten wir im vorliegenden Falle von der Kugel Kreise und von dem Rotationsellipsoid Ellipsen. Da der Mittelpunkt der Kugel im Inzidenzpunkt des Diopters liegen soll, so kommt bei der Abbildung nur die eine Hälfte der Kugel in Betracht, und zwar wird dieselbe von der anderen Hälfte durch die Tangentialebene im Inzidenzpunkt des Rotationsellipsoides getrennt. Das Diopter ist als isotroper Körper gedacht, bestehend aus Flintglas, wobei das Brechungsverhältnis der Strahlen, deren Brechbarkeit der Fraunhofer'schen Linie D entspricht, $n_D$ gleich 1,635 angenommen wurde.

Die am Schlusse des ersten Teils aufgestellten Gleichungen für die Objekt- und Bilddistanzen sind der numerischen Berechnung für die Bildkurven des Objekts zu Grunde gelegt. Zuvor sollen jedoch noch einige Beschränkungen gemacht werden, wodurch das Problem

eine Präzision erfährt und die Formeln eine wesentlich einfachere Gestalt annehmen.

Zunächst wird vorausgesetzt, dass die einfallenden Strahlenbündel nicht von vornherein astigmatisch sondern homocentrisch sind. Danach sind die Abscissen der einfallenden Strahlen $x_0$ und $\xi_0$ einander gleich zu setzen. Ausserdem soll das Azimut der Einfallsebene gleich Null werden. Die Einfallsebene wird in diesem Falle mit dem Hauptnormalschnitt zusammenfallen, und für die Beziehungen zwischen Objekt- und Bilddistanzen gelten dann folgende Formeln (Reusch):

$$\frac{-\rho_1 \cdot \sin e_1}{\sin (e_2 - e_1)} \cdot \frac{\cos^2 e_2}{x_0} + \frac{\rho_1 \sin e_2}{\sin (e_2 - e_1)} \cdot \frac{\cos^2 e_1}{x_1} = 1$$

$$\frac{-\rho_2 \sin e_1}{\sin (e_2 - e_1)} \cdot \frac{1}{x_0} + \frac{\rho_2 \cdot \sin e_2}{\sin (e_2 - e_1)} \cdot \frac{1}{x_2} = 1$$

Für den vorliegenden Fall einer Rotationsfläche ist hierin für $\rho_2$ die Normale N im Incidenzpunkt zu setzen.

Sind die Strahlen des einfallenden Bündels ausserdem noch einander parallel, so dass $x_0$ gleich $\infty$ wird, so ergeben sich für die Abstände der Brennlinien des gebrochenen Strahlenbündels vom Incidenzpunkte die folgenden Werte:

$$x_1 = \frac{\rho_1 \sin e_2 \cdot \cos^2 e_1}{\sin (e_2 - e_1)}, \quad x_2 = \frac{N \sin e_2}{\sin (e_2 - e_1)}$$

Diese beiden Gleichungen lassen ohne weiteres erkennen, unter welcher Bedingung das Strahlenbündel stigmatisch gebrochen wird. Dazu müssen die Brenn-

weiten $x_{1'}$ und $x_2$ einander gleich sein. Das findet aber nur dann statt, wenn $N = \rho_1 \cos^2 e_1$. Diese Gleichung giebt demnach die Bedingung für homocentrische Strahlenbrechung an.

Dieser besondere Fall soll jedoch in vorliegender Arbeit nicht berücksichtigt werden. Vielmehr wird von vornherein angenommen, dass die einfallenden Strahlenbündel astigmatisch gebrochen werden. Zu jedem leuchtenden Punkte giebt es dann zwei Bilder.

# Dritter Teil.

## Numerische Berechnung der Bildkurven in zwei Normalschnitten für einige spezielle Fälle und graphische Ausführung.

Der in der Ebene der Tafel liegende Hauptnormalschnitt des Rotationsellipsoides stellt eine Ellipse dar. Dieselbe ist nach der Formel $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, worin a = 55,1 mm und b = 46,6 mm angenommen sind, konstruiert worden. Der Incidenzpunkt, zugleich der Mittelpunkt der Kugel, dessen Radius 150 mm betragen soll, habe die Coordinaten x = 29,4 mm, y = 39,15 mm. Für die Berechnung des Krümmungsradius und der Normalen im Incidenzpunkt wurden die Formeln benutzt:

$$\rho = a^2 b^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)^{3/2}$$

$$N = b^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)^{1/2}$$

Wir lassen nun die Strahlen von der Normale ausgerechnet nach beiden Seiten von 10° zu 10° einfallen.

Es entsprechen dann jedesmal zwei gleichen Einfallswinkeln $e_2$ zwei gleiche Brechungswinkel $e_1$, die nach dem Snellius'schen Brechungsgesetz berechnet werden können.

$$n = 1{,}635 = \frac{\sin e_2}{\sin e_1}$$

n wird hierin gleich 1,635 gesetzt, da angenommen wurde, dass das Material des Diopters aus Flintglas besteht. Das Brechungsverhältnis n gilt dabei für die Fraunhofersche Linie D.

Im folgenden sollen nun drei markante Fälle der Reihe nach behandelt werden. Die Werte für die Bildabscissen in den einzelnen Fällen, sowie die graphische Auftragung derselben finden sich in der am Schluss der Arbeit beigefügten Tabelle und Zeichnung.

---

**I. Das Azimut der Einfallsebene gegen den Hauptnormalschnitt** $\varepsilon$ **sei** $O^0 . \xi_0 = x_0 = 150$ mm.

Aus den schon vorhin angegebenen Formeln für $\rho_1$ und N ergeben sich durch Einsetzen der Coordinaten des Incidenzpunktes $\rho_1 = 56{,}505$ mm, $N = 44{,}4402$ mm. Zur Berechnung der Bildpunktsabscissen für den Haupt- und Nebennormalschnitt werden in diesem Falle die Formeln von Reusch benutzt:

$$\overset{(1)}{x_1} = \frac{\cdot\, x_0 \rho_1 \sin e_2 \,.\, \cos^2 e_1}{\sin (e_2 - e_1)\, x_0 + \rho_1 \sin e_1 \cos^2 e_2}$$

$$\overset{(1)}{x_1} = - - \frac{x_0 \,.\, N \,.\, \sin e_2}{\sin (e_2 - e_1)\, x_0 + N \sin e_1} - -$$

Die für die einzelnen Einfallswinkel von $10^0$ zu $10^0$ berechneten Werte von $x_1$ und $x_2$ sind in der beigefügten Tabelle angegeben. Die ihnen entsprechenden Bildkurven der beiden Normalschnitte sind in anliegender Tafel mit $x_1$ und $x_2$ und den oberen Indices (1) bezeichnet. Der Wert von $x_0$ ist bei den Rechnungen negativ anzunehmen.

**II. Das Azimut $\varepsilon$ der Einfallsebene sei $0^0$. Ferner sollen die Strahlen parallel einfallen, so dass $x_0 = \infty$ wird.**

Für die Abscissen der Bildkurven in den beiden Normalschnitten ergeben sich dann folgende Werte:

$$x_1^{(2)} = \frac{\rho_1 \cdot \sin e_2 \cos^2 e_1}{\sin (e_2 - e_1)}$$

$$x_2^{(2)} = \frac{N \cdot \sin e_2}{\sin (e_2 - e_1)}$$

Die diesen Werten von $x_1^{(2)}$ und $x_2^{(2)}$ entsprechenden Bildkurven der Tafel können als Bilder des Sternenhimmels in den beiden Normalschnitten aufgefasst worden.

**III. Die Einfallsebene habe gegen den Hauptnormalschnitt das Azimut $\varepsilon$ gleich $20^0$. Ferner sei $x_0$ gleich 150 mm.**

Man erhält in diesem Falle einen sogenannten sekundären Nebennormalschnitt. Die Krümmungsradien desselben $\rho'$ und $\rho''$ stehen mit denjenigen des Haupt- und Nebennormalschnitts $\rho_1$ und $\rho_2$ in folgender Beziehung:

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{\cos^2 \varepsilon}{\rho_1} + \frac{\sin^2 \varepsilon}{\rho_2}$$

$$\frac{1}{\rho''} = \frac{\sin^2 \varepsilon}{\rho_1} + \frac{\cos^2 \varepsilon}{\rho_2}$$

Dieser Zusammenhang zwischen den Krümmungsradien ist auf folgende Weise zu erklären. Legt man zur Tangentialebene im Incidenzpunkt der brechenden Fläche einen unendlich nahen Parallelschnitt, so erhält man den Dupinschen Kegelschnitt (Ellipse mit den unendlich kleinen Halbachsen a und b). Die Halbachsen der beiden sekundären Normalschnitte seien c und d, die Höhe des Segments h. Dann kann man sich sämtliche 4 durch h gelegten Normalschnitte als Scheiteln von Parabeln denken. Es folgen dann aus der Haupteigenschaft derselben folgende Beziehungen:

$$h = a^2 : \rho_1 = b^2 : \rho_2 = c^2 : \rho' = d^2 : \rho''$$

Ferner ist aber:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2 \left\{ \frac{\cos^2 \varepsilon}{a^2} + \frac{\sin^2 \varepsilon}{b_2} \right\} = 1$$

$$b^2 = a^2 \rho_2 : \rho_1$$

daher:

$$c^2 \left\{ \frac{\cos^2 \varepsilon}{a^2} + \frac{\sin^2 \varepsilon}{a^2} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} \right\} = d^2 \left\{ \frac{\sin^2 \varepsilon}{a^2} + \frac{\cos^2 \varepsilon}{a^2} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} \right\} = 1$$

Nun ist aber wiederum:

$$c^2 = a^2 \cdot \frac{\rho'}{\rho_1}, \quad d^2 = a^2 \cdot \frac{\rho''}{\rho_2}$$

Daraus folgt:

$$\cos^2 \varepsilon \cdot \rho' + \sin^2 \varepsilon \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \rho' = \sin^2 \varepsilon \cdot \rho'' + \cos^2 \varepsilon \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \rho'' = \rho_1$$

Aus dieser Gleichung resultieren aber die obigen Beziehungen zwischen den Krümmungsradien.

Zur Berechnung der Bildabscissen für den vorliegenden Fall dienen die Neumann'schen Gleichungen. Da $\xi_0 = x_0$, so wird:

I. $$\frac{\rho' \cdot \rho'' \cdot \sin e_1}{(\rho'' \cos^2 \varepsilon + \rho' \sin^2 \varepsilon) \sin (e_2 - e_1)} \cdot \left\{ -\frac{\cos^2 e_2}{x_0} + n \cos^2 e_2 \left( \frac{\cos^2 \vartheta_2}{x_2} + \frac{\sin^2 \vartheta_2}{x_1} \right) \right\} = 1$$

II. $$\frac{\rho' \cdot \rho'' \cdot \sin e_1}{(\rho'' \sin^2 \varepsilon + \rho' \cos^2 \varepsilon) \sin (e_2 - e_1)} \cdot \left\{ -\frac{1}{x_0} + n \left( \frac{\sin^2 \vartheta_2}{x_2} + \frac{\cos^2 \vartheta_2}{x_1} \right) \right\} = 1$$

III. $$\frac{\rho' \rho'' \cdot \sin e_1}{(\rho' - \rho'') \sin (e_2 - e_1)} \cdot \frac{n \cdot \cos e_1 \cdot \sin 2 \vartheta_2}{\sin 2 \varepsilon} \cdot \left( \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right) = 1$$

Das sind drei Gleichungen mit drei Unbekannten $x_1$, $x_2$ und $\vartheta_2$. Zur Elimination von $\vartheta_2$ kann man nun folgendermassen verfahren.

In den einzelnen Gleichungen führt man zunächst Abkürzungen ein. Es wird zu diesem Zweck gesetzt in:

I. $$\frac{\cos^2 \vartheta_2}{x_2} + \frac{\sin^2 \vartheta_2}{x_1} = P_1$$

II. $$\frac{\sin^2 \vartheta_2}{x_2} + \frac{\cos^2 \vartheta_2}{x_1} = Q_1$$

III. $$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right) \sin 2 \vartheta_2 = R_1$$

Es folgt dann ohne weiteres:

IV. $$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = P_2 + Q_1$$

V. $$\left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right) \cos 2\,\vartheta_2 = P_1 - Q_1$$

Aus III und V ergiebt sich: $\operatorname{tg} 2\,\vartheta_2 = \dfrac{2\,R_1}{P_1 - Q_1}$

Aus I, II, III folgt schliesslich:

$$\frac{1}{x_1\,x_2} = P_1\,Q_1 - R^2$$

Die Werte von $x_1$ und $x_2$ ergeben sich daher als Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$\left(\frac{1}{x} - P_1\right)\left(\frac{1}{x} - Q_1\right) = R_1^2$$

Aus obigen Abscissengleichungen gilt für $P_1$, $Q_1$, und $R_1$:

$$P_1 = \frac{x_0\,(\rho''\cos^2\varepsilon + \rho'\sin^2\varepsilon)\sin(e_2 - e_1) + \rho'\,\rho''\sin e_1}{n\,x_0\,\rho'\,\rho''\sin e_1}$$

$$Q_1 = \frac{x_0\,(\rho''\sin^2\varepsilon + \rho'\cos^2\varepsilon)\sin(e_2 - e_1) + \rho'\,\rho''\sin e_1}{n\,x_0\,\rho^{1}\,\rho^{11}\sin e_1}$$

$$R_1 = \frac{(\rho' - \rho'')\sin(e_2 - e_1)\sin 2\,\varepsilon}{2\,n\,\rho'\,\rho''\sin e_1\cos e_1}$$

Man hat also nur für die einzelnen Einfallswinkel die Werte für P, Q, und R, aus diesen Gleichungen zu berechnen und in die quadratische Gleichung einzusetzen, um die entsprechenden Bildpunktsabscissen zu erhalten. Die einzelnen Werte von $x_1^{(3)}$ und $x_2^{(3)}$ sind aus umstehender Tabelle ersichtlich. Die für diesen Fall geltenden Bildkurven sind in der beigefügten Tafel

mit den entsprechenden Indices $x_1^{(3)}$ und $x^{2(3)}$ versehen. Ferner ist hierbei zu berücksichtigen, dass das Objekt des Halbkreises nicht in der Ebene der Tafel liegt.

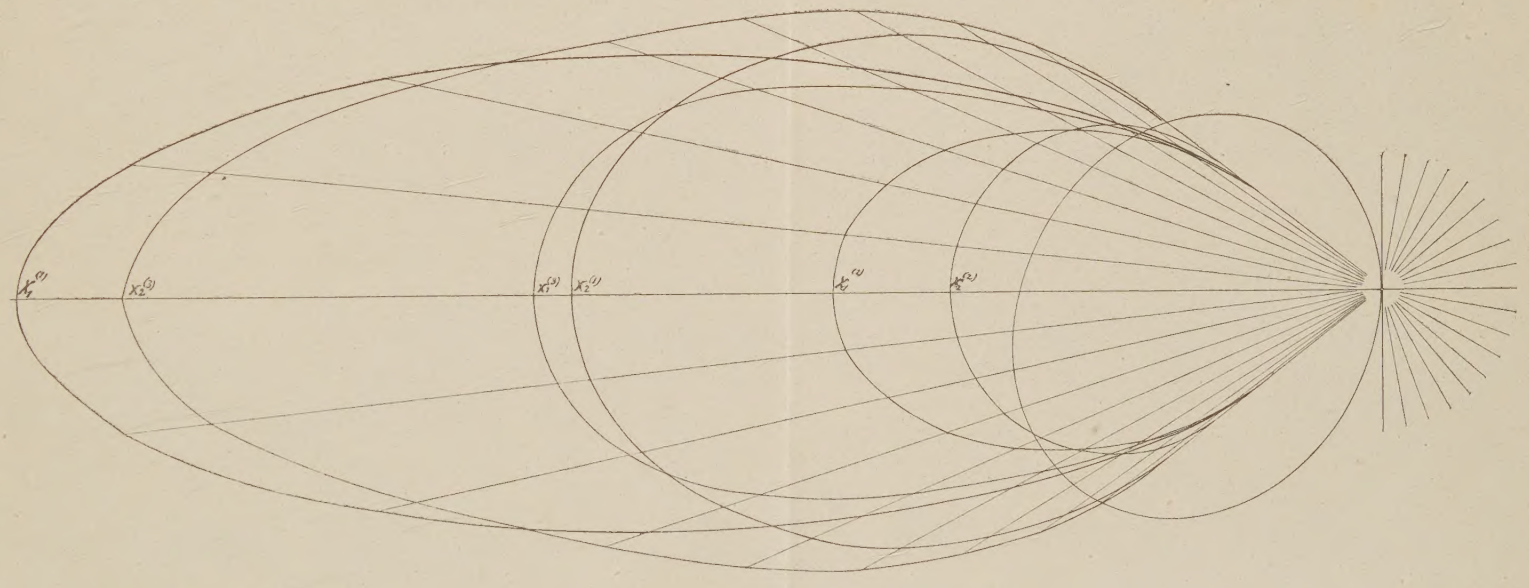
Das vollständige Bild der Halbkugel wird bei dauernder Veränderung des Azimuts ein Brennraum, dessen Querschnitt einem elliptischen Kegel ähnlich ist.

# Tabelle

| | | | | ad I. | | | ad II. | | | ad. III. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_2$ | ° | $e_1$' | " | $x_0$ | $x_1^{(1)}$ | $x_2^{(1)}$ | $x_0$ | $x_1^{(2)}$ | $x_2^{(2)}$ | $x_0$ | $x_1^{(3)}$ | $x_2^{(3)}$ |
| | | | | mm | mm | mm | | mm | mm | mm | mm | mm |
| 0° | 0' | 0' | 0" | 150 | 358,597 | 214,505 | ∞ | 145,489 | 114,425 | 150 | 225,042 | 331,767 |
| 10° | 6° | 5' | 48" | „ | 331,424 | 210,801 | „ | 142,513 | 113,363 | „ | 219,961 | 310,621 |
| 20° | 12° | 4' | 29" | „ | 270,408 | 200,124 | „ | 133,988 | 110,201 | „ | 203,959 | 261,793 |
| 30° | 17° | 48' | 25" | „ | 205,201 | 184,240 | „ | 121,258 | 105,206 | „ | 174,765 | 216,343 |
| 40° | 23° | 9' | 1" | „ | 151,299 | 164,751 | „ | 105,936 | 98,5489 | „ | 136,328 | 184,307 |
| 50° | 27° | 56' | 19" | „ | 111,616 | 143,769 | „ | 89,9458 | 90,6369 | „ | 102,926 | 157,823 |
| 60° | 31° | 59' | 2" | „ | 83,8555 | 123,041 | „ | 74,9503 | 81,9347 | „ | 78,2277 | 133,706 |
| 70° | 35° | 4' | 52" | „ | 64,9952 | 103,845 | „ | 62,1196 | 72,9549 | „ | 61,0020 | 112,101 |
| 80° | 37° | 2' | 13" | „ | 52,5548 | 86,9944 | „ | 52,0273 | 64,2163 | „ | 49,4621 | 93,7067 |
| 90° | 37° | 42' | 24" | „ | 44,7042 | 72,8588 | „ | 44,7042 | 56,1715 | „ | 42,1003 | 78,0573 |

Am Schluss meiner Arbeit verfehle ich nicht, auch an dieser Stelle meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. Matthiessen für die Überlassung des Themas sowie die liebenswürdige Unterstützung, die mir bei der Ausführung der Arbeit zu teil geworden ist, meinen ehrerbietigsten und aufrichtigsten Dank auszusprechen.

*Tafel*



M. 1 : 2